2 ع ت — الإشتقاق

1. قابلية اشتقاق دالة في عدد

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه عدد a .

نقول إن fقابلة للاشتقاق في a إذا كان: $l=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(x)}{x-a}\in R$

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في a , ويكتب . $f'(a)$

وفي هذه الحالة لدينا : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(x)}{x-a}=f'(a)$.

2- قابلية اشتقاق دالة على اليمين و على اليسارفي عدد :

لتكن f دالةعددية معرفة على مجال من النوع $[a,a+\varepsilon[$ حيث $\varepsilon\succ 0$.

fقابلة للاشتقاق على اليمين في a إذا كان: $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in R$.

هذه النهاية , عندما تكون منتهية , تسمى العدد المشتق للدالةf على اليمين في a ونرمز له بالرمز : $f'_d(a)$.

بطريقة مماثلة نعرف قابلية اشتقاق دالة على اليسار في عدد .

نرمزللعدد المشتق للدالة f في العدد a بالرمز: $f'_g(a)$.

خاصية :

تكون دالة f قابلة للاشتقاق في عدد a إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق على اليمين في a و قابلة للاشتقاق على اليسار في a و $f'_d(a)=f'_g(a)$

بتعبير اخر : (f قابلة للاشتقاق في a) $\Leftrightarrow$ ($f'_d(a)=f'_g(a)$).

خاصية : الاشتقاق والاتصال

كل دالة قابلة للاشتقاق في عدد a تكون متصلة في العدد a .

انتبه ! العكس غير صحيح . (اعتبر الدالة $x\to|x|$)

قابلية اشتقاق دالة على مجال

تكون دالة f ق ش على مجال $]a,b[$ إذا كانت ق ش في جميع نقطه .

تكون f ق ش على $[a,b[$ إذا كانت ق ش على $]a.b[$ وعلى اليمين في a

تكون f ق ش $]a,b]$ إذا كانت ق ش على $]a,b[$ وعلى اليسار في b .

ملاحظة : نعرف بالمثل قابلية اشتقاق دالة على باقي أنواع المجالات .

مماس منحنى دالة – نصف مماس منحنى دالة

إذا كانت دالة fقابلة للاشتقاق في عدد a فإن منحناها يقبل مماسا في النقطة $M(a;f(a))$ معادلته $y=f'(a).(x-a)+f(a)$

ملاحظة : العدد $f'(a)$ هو المعامل الموجه للمماس في a .

إذا كانت f ق ش على اليمين في a فإن منحناهايقبل نصف مماس على اليمين في النقطة $M(a;f(a))$ معادلته : $\begin{cases}y=f'_d(a).(x-a)+f(a)\\ x\ge a\end{cases}$

إذا كانت f ق ش على اليسار في a فإن منحناهايقبل نصف مماس على اليمين في $M(a;f(a))$ معادلته : $\begin{cases}y=f'_g(a).(x-a)+f(a)\\ x\le a\end{cases}$

إذا كان: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في a ومنحناها يقبل نصف مماس مواز لمحور الأراتيب .

إذا كان $f'_d(a)\neq f'_g(a)$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في a ومنحناها يقبل نصفي مماس ليس لهما نفس الحامل .

في هذه الحالة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة مزواة

تأويلات هندسية

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$+\infty$	$l\in R^*$	0
fغير ق ش على اليمين في a ومنحنى f يقبل نصف مماس عمودي على اليمين النقطة في $M(a;f(a))$	f ق ش على اليمين في a ومنحنى f يقبل نصف مماس مائل على اليمين $M(a;f(a))$	f ق ش على اليمين في a ومنحنى f يقبل نصف مماس أفقي على اليمين $M(a;f(a))$

3. مشتقة المركبة ..مشتقة الدالة العكسية :

خاصية : مشتقة المركبة في نقطة

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I)\subset J$.ليكن a عنصرا من I .

إذا كانت الدالة f ق ش في a و الدالة g ق ش في $f(a)$ فإن : $g\circ f$ ق ش في a و لدينا :

$$(g\circ f)'(a)=f'(a)\times g'(f(a))$$

خاصية : مشتقة المركبة على مجال

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I)\subset J$.

إذا كانت الدالة f ق ش على I و الدالة g ق ش على J فإن $g\circ f$ ق ش على I ولكل x من I : $(g\circ f)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))$

خاصية :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I.

إذا كانت f قابلة للإشتقاق في عدد a و $f'(a)\neq 0$ فإن الدالة f^{-1} قابلة للإشتقاق في $b=f(a)$ ولدينا $f^{-1}{}'(b)=\frac{1}{f'(a)}$

2ع ت الإشتقاق

خاصية:مشتقة دالة الجذر

ليكن n من $N^*-\{1\}$.دالة الجذر من الرتبة n ق ش على R_+^* ولدينا : $\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ لكل x من R_+^*

خاصية

ليكن n من $N^*-\{1\}$ ،

إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق وموجبة قطعا على مجال I

فإن الدالة $\sqrt[n]{u}$ قابلة للإشتقاق على I ولدينا :

$\left(\sqrt[n]{u}\right)'=\dfrac{u'}{n\left(\sqrt[n]{u}\right)^{n-1}}$ لكل x من I .

4.تطبيقات :

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I .

. f تزايدية على I يكافئ $f'(x)\geq 0$ لكل x من I .

.f تناقصية على I يكافئ $f'(x)\leq 0$ لكل x من I .

لتكن f دالة ق ش على مجال مفتوح I و x_0 عنصر من I

تقبل f مطرافا في x_0 إذا وفقط إذا كانت f' تنعدم في x_0 وتغير إشارتها في x_0

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I .

. تقعر C موجه نحو الأعلى يكافئ $f''(x)\geq 0$ لكل x من I

هندسيا :C يوجد فوق جميع مماساته

. تقعر C موجه نحو الأسفل يكافئ $f''(x)\leq 0$ لكل x من I

هندسيا :C يوجد تحت جميع مماساته

.إذا كانت f '' تنعدم في x_0 من I وتغيرإشارتها بجوار x_0

فإن $I(x_0,f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى C.

هندسيا : تقعر C يتغير في النقطة $I(x_0,f(x_0))$.

5.عناصر تماثل منحنى دالة :

لتكن f دالة معرفة على مجموعة D و a وb عددين حقيقيين

. يكون المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تماثل منحنى f إذاوفقط

إذا كان لكل x من D لدينا $\begin{cases}2a-x\in D\\ f(2a-x)=f(x)\end{cases}$

. تكون النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل منحنى f إذا وفقط إذا كان

لكل x من D لدينا : $\begin{cases}2a-x\in D\\ f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}$

ملاحظات :

.محورتماثل منحنى دالة دائما يكون مواز لمحور الأراتيب.

.مركزتماثل منحنى دالة لا ينتمي بالضرورة إليه.

ليكن T عددا حقيقيا موجبا قطعا .وf دالة معرفة على مجموعة D .

نقول إن f دورية وT دور لها إذا كان: $(\forall x\in D):\begin{cases}x\pm T\in D\\ f(x+T)=f(x)\end{cases}$

6.مشتقات الدوال الإعتيادية والعمليات :

الدالة f	الدالة المشتقة	حيز تعريف الدالة المشتقة
c	0	R
ax	a	R
x^n $n\in N^*-\{1\}$	$n\,x^{n-1}$	R
x^r $n\in Z^- -\{-1\}$	$r\,x^{r-1}$	R_+^* أو R_-^*
$\sqrt[n]{x}$ $n\in N^*-\{1\}$	$\dfrac{1}{n\,.\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	R_+^*
x^r $r\in Q^*$	$r\,x^{r-1}$	R_+^*
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	R_+^* أو R_-^*
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	R_+^*
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	R
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	R
$\tan x$	$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	على كل مجال ضمن $R-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,/\,\pi\in Z\right\}$
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	R_+^* أو R_-^*
e^x	e^x	R
$\alpha\,u$	$\alpha\,u'$	حيث تكون u ق ق ش
$u+v$	$u'+v'$	حيث تكون u و v ق ق ش
$u.v$	$u'v+uv'$	حيث تكون u و v ق ق ش
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	حيث تكون u و v ق ق ش و v لاتنعدم
$\dfrac{1}{u}$	$\dfrac{-u'}{u^2}$	حيث تكون u ق ق ش و لاتنعدم
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	حيث تكون u ق ق ش و موجبة قطعا
$\sqrt[n]{u}$	$\dfrac{u'}{n.\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	حيث تكون u ق ق ش و موجبة قطعا
u^n $n\in N^*-\{1\}$	$nu^{n-1}.u'$	حيث تكون u ق ق ش
$\ln\lvert u\rvert$	$\dfrac{u'}{u}$	حيث تكون u ق ق ش و لاتنعدم
e^u	$u'e^u$	R